Le sujet se compose de 5 exercices indépendants et comporte 2 pages numérotées 1/2 à 2/2.

La qualité de la rédaction et des raisonnements entrera dans la notation.

Calculatrice autorisée Durée : 3h

EXERCICE 1 *Suite récurrente* *3 points*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$$

1/ Démontrer que (u_n) est décroissante.

2/ Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \in]0\,;1[$$

3/ En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

EXERCICE 2 *Une limite connue* *4,5 points*

1/ En étudiant les variations de la fonction f définie par $f(x) = \sin x - x$ sur $[0\,;\pi]$, montrer que

$$\forall x \in [0\,;\pi], \qquad \sin x \leq x$$

2/ On considère la fonction g définie sur $[0\,;\pi]$ par

$$g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

a) Démontrer que la fonction dérivée g' est croissante sur $[0\,;\pi]$.

b) En déduire les variations puis le signe de g sur $[0\,;\pi]$.

3/ Déduire des questions précédentes que

$$\forall x \in [0\,;\pi], \qquad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

4/ Déterminer alors

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}$$

EXERCICE 3 *ROC* *1,5 points*

1/ Rappeler la définition de l'indépendance de deux événements A et B.

2/ On suppose que A et B sont deux événements indépendants.
Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

EXERCICE 4 *Darts* *5,5 points*

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle manque la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère l'événement suivant :
A_n = « Alice atteint la cible au $n^{\text{ème}}$ coup » et on pose $p_n = P(A_n)$.

1/ Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\quad A_n = (A_n \cap A_{n-1}) \cup \left(A_n \cap \overline{A}_{n-1}\right)$.

2/ En déduire que $P(A_n) = P(A_n \cap A_{n-1}) + P\left(A_n \cap \overline{A}_{n-1}\right)$ puis que

$$P(A_n) = P_{A_{n-1}}(A_n)\,P(A_{n-1}) + P_{\overline{A}_{n-1}}(A_n)\,P\left(\overline{A}_{n-1}\right)$$

3/ Pour tout entier naturel $n \geq 2$, déduire de l'énoncé $\quad P_{A_{n-1}}(A_n) \quad$ et $\quad P_{\overline{A}_{n-1}}(A_n)$.

4/ Déterminer p_1 et déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$$

5/ Pour $n \geq 1$, on pose : $u_n = p_n - \frac{3}{13}$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q.

6/ Ecrire u_n puis p_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

7/ A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?

EXERCICE 5 *Complexes et géométrie* *5,5 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm.

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

2/ On considère les points
- A d'affixe $a = \sqrt{3} - i$;
- B d'affixe $b = \sqrt{3} + i$;
- C, milieu du segment $[OB]$, d'affixe c.

a) Déterminer une forme exponentielle de a, b et c.

b) Sur une figure, placer les points A, B et C.

c) Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

3/ Soit D le point tel que le triangle OCD est isocèle rectangle en O et $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, et E le point tel que $DABE$ soit un parallélogramme.

a) Placer les points D et E.

b) Déterminer une forme exponentielle de l'affixe d du point D, puis sa forme algébrique et montrer que l'affixe e du point E est $e = \frac{1}{2} + \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)i$.

c) Démontrer que $OE = BE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

d) Enfin, justifier que E, C et A sont alignés.

Exercice 1 *Suite récurrente* *3 points*

1/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n(1-u_n) - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

2/ Démontrons par récurrence : pour tout entier naturel n, $\underbrace{u_n \in]0\,;1[}_{\mathscr{P}(n)}$.

On sait que $u_0 = \dfrac{1}{4}$ donc $u_0 \in]0\,;1[$, ce qui est $\mathscr{P}(0)$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
On a $u_n \in]0\,;1[$ soit encore $0 < u_n < 1$ donc, en multipliant cette double inégalité par $1-u_n$ puisque $1-u_n > 0$, $0 < u_n(1-u_n) < (1-u_n)$ et comme $1-u_n < 1$ puisque $u_n > 0$, on obtient $0 < u_n(1-u_n) < 1$ soit encore $0 < u_{n+1} < 1$ ce qui est $\mathscr{P}(n+1)$.
$\mathscr{P}$ est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0, le principe de récurrence assure que $\boxed{\mathscr{P} \text{ est vraie pour tout entier naturel } n}$.

3/ (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ qui vérifie $0 \leq \ell \leq 1$.
D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$; d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1-u_n) = \ell(1-\ell)$ par opérations algébriques sur les limites. L'unicité de la limite assure que ℓ vérifie $\ell = \ell(1-\ell)$ ce qui est équivalent à $-\ell^2 = 0$ soit encore $\ell = 0$. On peut conclure que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$.

Exercice 2 *Une limite connue* *4,5 points*

1/ f est définie, continue et dérivable sur $[0\,;\pi]$ et $f'(x) = \cos x - 1$. Ainsi, $f'(x) \leq 0$ sur $[0\,;\pi]$ et f' s'annule en 0. On peut en déduire le tableau de variations de f suivant :

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\pi$

Par conséquent, $\forall x \in [0\,;\pi]$, $f(x) \leq 0$ ce qui équivaut à $\forall x \in [0\,;\pi]$, $\sin x - x \leq 0$ soit encore $\boxed{\forall x \in [0\,;\pi]\,, \quad \sin x \leq x}$.

2/ a) g est définie, continue et dérivable sur $[0\,;\pi]$ et $g'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.
g' est définie, continue et dérivable sur $[0\,;\pi]$ et $g''(x) = -\sin x + x = -f(x)$.
D'après ce qui précède, on peut en déduire que $\boxed{g' \text{ est croissante sur } [0\,;\pi]}$.

b) g' est croissante sur $[0\,;\pi]$ et $g'(0) = 0$ donc g' est positive sur $[0\,;\pi]$. On peut en déduire le tableau de variations de g :

x	0		π
$g'(x)$	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi^3}{6}-\pi$

et conclure que $\boxed{\forall x \in [0\,;\pi],\ g(x) \geq 0}$.

3/ On sait d'après 1. que $\forall x \in [0\,;\pi]\,,\quad \sin x \leq x$, d'une part. On sait d'après 2. que $\forall x \in [0\,;\pi],\ g(x) \geq 0$ ce qui équivaut à $\forall x \in [0\,;\pi],\ \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \geq 0$ soit encore $\forall x \in [0\,;\pi]\,,\quad \sin x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$, d'autre part.

On peut donc conclure que $\boxed{\forall x \in [0\,;\pi]\,,\quad x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x}$.

4/ $\forall x \in]0\,;\pi]$, en divisant par x, $\quad 1 - \dfrac{x^2}{6} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \dfrac{x^2}{6} = 1$, le théorème d'encadrement assure que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$ qui est un résultat classique.

EXERCICE 3 *ROC* *1,5 points*

Confer le cours.

EXERCICE 4 *Darts* *5,5 points*

1/ Avant qu'Alice n'atteigne la cible au $n^{\text{ème}}$ lancer, au $(n-1)^{\text{ème}}$, elle l'a soit atteinte soit manquée. Ceci se traduit par : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geq 2, \quad A_n = (A_n \cap A_{n-1}) \cup \left(A_n \cap \overline{A}_{n-1}\right)}$.

2/ $(A_n \cap A_{n-1})$ et $\left(A_n \cap \overline{A}_{n-1}\right)$ sont incompatibles donc $\boxed{P(A_n) = P(A_n \cap A_{n-1}) + P\left(A_n \cap \overline{A}_{n-1}\right)}$; et d'après la formule des probabilités conditionnelles, $\boxed{P(A_n) = P_{A_{n-1}}(A_n)\,P(A_{n-1}) + P_{\overline{A}_{n-1}}(A_n)\,P\left(\overline{A}_{n-1}\right)}$.

3/ Evidemment, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\quad \boxed{P_{A_{n-1}}(A_n) = \dfrac{1}{3}} \quad$ et $\quad \boxed{P_{\overline{A}_{n-1}}(A_n) = 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}}$.

4/ D'après l'énoncé, $\boxed{p_1 = \dfrac{1}{2}}$ et d'après 2., pour tout entier naturel $n \geq 2$, $p_n = \dfrac{1}{3}p_{n-1} + \dfrac{1}{5}(1 - p_{n-1})$

$\boxed{\text{soit encore pour tout entier naturel } n \geq 2,\ p_n = \dfrac{2}{15}p_{n-1} + \dfrac{1}{5}}$.

5/ Pour $n \geq 1$, on pose : $u_n = p_n - \dfrac{3}{13}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{3}{13} = \dfrac{2}{15}p_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{13} = \dfrac{2}{15}\left(p_n - \dfrac{3}{13}\right) = \dfrac{2}{15}u_n$.

Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est une suite géométrique de premier terme } u_1 = p_1 - \dfrac{3}{13} = \dfrac{7}{26} \text{ et de raison } q = \dfrac{2}{15}}$.

6/ Par propriété des suites géométriques, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 q^{n-1} = \dfrac{7}{26}\left(\dfrac{2}{15}\right)^{n-1}}$ puis

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = u_n + \dfrac{3}{13} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{7}{26}\left(\dfrac{2}{15}\right)^{n-1}}$.

Enfin, comme $-1 < \dfrac{2}{15} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{15}\right)^{n-1} = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{13}}$.

7/ $P(A_1) = p_1 = \dfrac{1}{2}$ et $P(A_2) = p_2 = u_2 + \dfrac{3}{13} = \dfrac{4}{15}$ d'où, $P(A_1).P(A_2) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{15} = \dfrac{2}{15}$, d'une part.

$P(A_1 \cap A_2) = P_{A_1}(A_2)\,P(A_1) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$, d'autre part.

Comme $P(A_1).P(A_2) \neq P(A_1 \cap A_2)$, $\boxed{A_1 \text{ et } A_2 \text{ ne sont donc pas indépendants}}$.

EXERCICE 5 *Complexes et géométrie* *5,5 points*

1/ Le discriminant vaut $\Delta = -4 = (2i)^2$ d'où les solutions $\boxed{z_1 = \sqrt{3} - i \text{ et } z_2 = \sqrt{3} + i}$.

2/ a) On a $|a| = 2$ d'où $\boxed{a = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}}$. Puis $\boxed{b = \overline{a} = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}}$ et enfin $\boxed{c = \dfrac{b}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}}$.

b) A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon 2 alors que C est sur le cercle trigonométrique, qui sert par ailleurs à repérer les angles $\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$. Pour le placement des points, voir figure ci-après.

c) On sait que $|a| = |b| = 2$ donc $OA = OB = 2$. Puis $AB = |b - a| = |2i| = |2|\,|i| = 2 = OA = OB$. Ceci confirme que $\boxed{\text{le triangle } OAB \text{ est équilatéral}}$.

3/ a) D est sur la perpendiculaire à (OC) passant par O et tel que $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$; D est également situé sur le cercle trigonométrique puisque $OD = OC = 1$. Le point E s'obtient par construction du parallélogramme $DABE$. Pour le placement des points, voir figure ci-après.

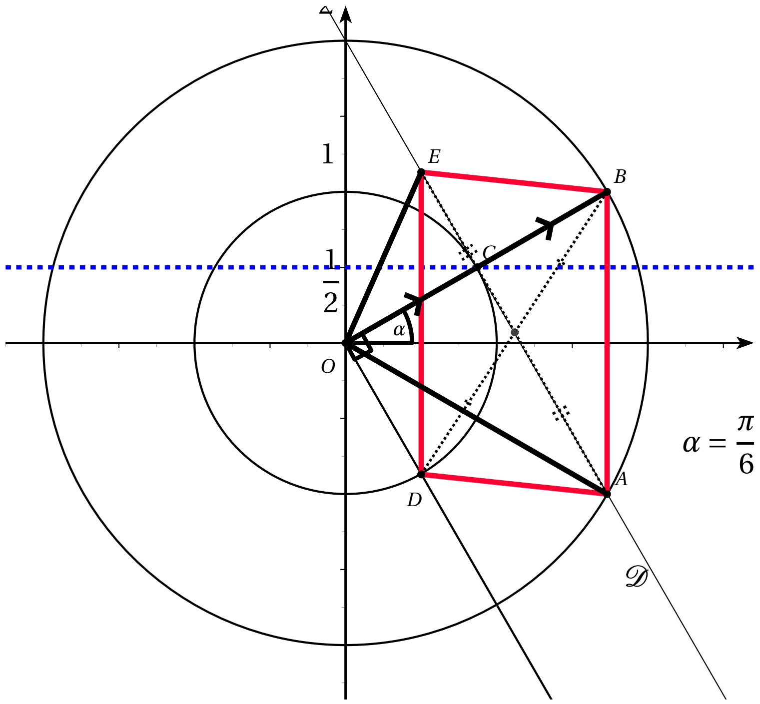
b) On détermine $|d|$ et $\arg(d)$.

On a $|d| = OD = 1$ et $\arg(d) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = \arg(c) - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et par suite $\boxed{d = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}}$; puis $\boxed{d = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

$DABE$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$ d'où $e - d = b - a$ puis $\boxed{e = b - a + d = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{4 - \sqrt{3}}{2}\right) i}$.

c) $OE = |e|$ et $BE = |e - b|$ nous donne bien $\boxed{OE = BE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$.

d) On a : $OE = BE$ donc $E \in \mathscr{D}$, médiatrice de $[OB]$. C milieu de $[OB]$, donc $C \in \mathscr{D}$. Enfin, $OA = AB$ car OAB est équilatéral donc $A \in \mathscr{D}$.
On a donc bien $\boxed{E, C \text{ et } A \text{ alignés}}$.



1
$\frac{1}{2}$
E
B
C
O
D
A
α
$\alpha = \frac{\pi}{6}$
$\mathscr{D}$